



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: MODEL 2025	CONVOCATORIA: MODELO 2025
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN: Cada problema se puntuará hasta 2,5 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.
A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto.
Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)
Una finca agrícola cultiva tres tipos de plantas que producen: tomates, pimientos y calabacines.

Estas plantas son susceptibles de sufrir una plaga que puede afectar su rendimiento. La finca utiliza tres métodos de control de plagas: control biológico, pesticidas químicos y métodos orgánicos. La efectividad de cada método varía según el tipo de planta.
• El 50% del área está dedicada a tomates, el 30% a pimientos y el 20% a calabacines.
• Para los tomates, la finca utiliza control biológico en el 40% de la finca, pesticidas químicos en el 30% y métodos orgánicos en el 30%.
• Para los pimientos, la finca utiliza control biológico en el 30%, pesticidas químicos en el 40% y métodos orgánicos en el 30%.
• Para los calabacines, se utiliza control biológico en el 20%, pesticidas químicos en el 50% y métodos orgánicos en el 30%.

La efectividad de cada método de control para evitar la plaga, en porcentaje, es la siguiente:
• Para los tomates:
o El control biológico tiene un 85% de efectividad.
o Los pesticidas químicos tienen un 95% de efectividad.
o Los métodos orgánicos tienen un 80% de efectividad.

• Para los pimientos:
o El control biológico tiene un 80% de efectividad.
o Los pesticidas químicos tienen un 90% de efectividad.
o Los métodos orgánicos tienen un 75% de efectividad.

• Para los calabacines:
o El control biológico tiene un 70% de efectividad.
o Los pesticidas químicos tienen un 85% de efectividad.
o Los métodos orgánicos tienen un 65% de efectividad.

Responda a todos los apartados

1.1 (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?

Resolución

T = la planta produce tomates   P = la planta produce pimientos   C = la planta produce calabacines

B = la planta es tratada con control biológico   Q = la planta es tratada con pesticidas químicos

O = la planta es tratada con métodos orgánicos

L = el tratamiento es efectivo y la planta queda libre de plagas.

Según el enunciado, $p(T) = 0{,}5 \quad p(P) = 0{,}3 \quad p(C) = 0{,}2 \qquad p(B/T) = 0{,}4 \quad p(Q/T) = 0{,}3 \quad p(O/T) = 0{,}3$

$p(B/P) = 0{,}3 \quad p(Q/P) = 0{,}4 \quad p(O/P) = 0{,}3 \qquad p(B/C) = 0{,}2 \quad p(Q/C) = 0{,}5 \quad p(O/C) = 0{,}3$

$p[L/(B \cap T)] = 0{,}85 \quad p[L/(Q \cap T)] = 0{,}95 \quad p[L/(O \cap T)] = 0{,}8$

$p[L/(B \cap P)] = 0{,}8 \quad p[L/(Q \cap P)] = 0{,}9 \quad p[L/(O \cap P)] = 0{,}75$

$p[L/(B \cap C)] = 0{,}7 \quad p[L/(Q \cap C)] = 0{,}85 \quad p[L/(O \cap C)] = 0{,}65$

1.1. Se pide p(L), que por el teorema de probabilidad total es

$$p(L) = p(B \cap T)\, p[L/(B \cap T)] + p(Q \cap T)\, p[L/(Q \cap T)] + p(O \cap T)\, p[L/(O \cap T)] +$$

$$+ p(B \cap P)\, p[L/(B \cap P)] + p(Q \cap P)\, p[L/(Q \cap P)] + p(O \cap P)\, p[L/(O \cap P)] +$$

$$+ p(B \cap C)\, p[L/(B \cap C)] + p(Q \cap C)\, p[L/(Q \cap C)] + p(0 \cap C)\, p[L/(O \cap C)] =$$

$$= p(T)p(B/T)\, p[L/(B \cap T)] + p(T)p(Q/T)\, p[L/(Q \cap T)] + p(T)p(O/T)\, p[L/(O \cap T)] +$$

$$+ p(P)p(B/P)\, p[L/(B \cap P)] + p(P)p(Q/P)\, p[L/(Q \cap P)] + p(P)p(O/P)\, p[L/(O \cap P)] +$$

$$+ p(C)p(B/C)\, p[L/(B \cap C)] + p(C)p(Q/C)\, p[L/(Q \cap C)] + p(C)p(0/C)\, p[L/(O \cap C)] =$$

$$= p(T)\{p(B/T)\, p[L/(B \cap T)] + p(Q/T)\, p[L/(Q \cap T)] + p(O/T)\, p[L/(O \cap T)]\} +$$

$$+ p(P)\{p(B/P)\, p[L/(B \cap P)] + p(Q/P)\, p[L/(Q \cap P)] + p(O/P)\, p[L/(O \cap P)]\} +$$

$$+ p(C)\{p(B/C)\, p[L/(B \cap C)] + p(Q/C)\, p[L/(Q \cap C)] + p(0/C)\, p[L/(O \cap C)]\} =$$

$$= 0{,}5(0{,}4 \,.\, 0{,}85 + 0{,}3 \,.\, 0{,}95 + 0{,}3 \,.\, 0{,}8) + 0{,}3(0{,}3 \,.\, 0{,}8 + 0{,}4 \,.\, 0{,}9 + 0{,}3 \,.\, 0{,}75) + 0{,}2(0{,}2 \,.\, 0{,}7 +$$

$$+ 0{,}5 \,.\, 0{,}85 + 0{,}3 \,.\, 0{,}65) = 0{,}5 \,.\, 0{,}865 + 0{,}3 \,.\, 0{,}825 + 0{,}2 \,.\, 0{,}76 = 0{,}832 = 83{,}2\%$$

1.2 (0,75 puntos) Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?

Resolución

Se pide $p(P/L) = \frac{p(P \cap L)}{p(L)}$; observa que $p(P \cap L) = p(P \cap L \cap B) + p(P \cap L \cap Q) + p(P \cap L \cap O)$

Por otra parte

$0{,}8 = p[L/(B \cap P)] = \frac{p(P \cap L \cap B)}{p(B \cap P)} = \frac{p(P \cap L \cap B)}{p(P)p(B/P)} = \frac{p(P \cap L \cap B)}{0{,}3\ .\ 0{,}3} \Rightarrow p(P \cap L \cap B) = 0{,}8\ .\ 0{,}3\ .\ 0{,}3 = 0{,}072$

$0{,}9 = p[L/(Q \cap P)] = \frac{p(P \cap L \cap Q)}{p(Q \cap P)} = \frac{p(P \cap L \cap Q)}{p(P)p(Q/P)} = \frac{p(P \cap L \cap Q)}{0{,}3\ .\ 0{,}4} \Rightarrow p(P \cap L \cap Q) = 0{,}9\ .\ 0{,}3\ .\ 0{,}4 = 0{,}108$

$0{,}75 = p[L/(O \cap P)] = \frac{p(P \cap L \cap O)}{p(O \cap P)} = \frac{p(P \cap L \cap O)}{p(P)p(O/P)} = \frac{p(P \cap L \cap O)}{0{,}3\ .\ 0{,}3} \Rightarrow p(P \cap L \cap Q) = 0{,}75\ .\ 0{,}3\ .\ 0{,}3 = 0{,}0675$

Por tanto, la probabilidad que se pide es Se pide $p(P/L) = \frac{p(P \cap L)}{p(L)} = \frac{0{,}072 + 0{,}108 + 0{,}0675}{0{,}832} \cong 29{,}75\%$

1.3 (1 punto) Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Resolución

Al ser la probabilidad de que un tomate tratado mediante métodos orgánicos esté libre de plagas, $p[L/(O \cap T)] = 0{,}8$, entonces la variable X = nº de tomates libres de la plaga, en una muestra de 11 tomates $\rightarrow B(11\ ;0{,}8)$

La ley de probabilidad es $p_k = p(X = k) = \binom{11}{k} 0{,}8^k . 0{,}2^{11-k}$, con k = 0, 1, 2, , ..., 9, 10, 11.

Nos piden $p(X \geq 3) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) - p(X = 2) =$

$= 1 - \binom{11}{0} 0{,}8^0 . 0{,}2^{11} - \binom{11}{1} 0{,}8^1 . 0{,}2^{10} - \binom{11}{2} 0{,}8^2 . 0{,}2^9 \cong 0{,}999981 = 99{,}9981\%$

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)
Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2
2.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Se pide:

2.1.1 (1,25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro a.

Resolución

2.2.1 matrices de coeficientes y ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

det A = $2 + a^2 - a - 2a^2 + a - 1 = -a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$

– Si $a \neq \pm 1$, det $A \neq 0$ y rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si a = 1, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f2+f1 \\ f3-f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} f3-2f2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = 2$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

– Si a = –1, det A = 0 y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rg A = 2.

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f2+f1 \\ f3=-f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -f1 \\ f3=-f2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rg A* = 2. Luego, rg A* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

2.1.2 (1,25 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

Resolución

– Para a ≠ ±1, el sistema es compatible determinado. Hallemos la solución por la regla de Cramer:

Recuerda: matrices de coeficientes y ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

det A = 1 – a^2 ; $A_x = \begin{pmatrix} -2 & -1 & a \\ 3 & 2 & -a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ -1 & 3 & -a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A_z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$

det A_x = –4 + 2a + 3a – 4a – 2a + 3 = –1 – a ; det A_y = 3 + 2a^2 – 2a – 3a^2 + 2a – 2 = 1 – a^2 = det A

det A_z = 4 – 3a + 2 + 4a – 3 – 2 = 1 + a. Luego, la solución única es

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{-(1+a)}{(1+a)(1-a)} = \frac{-1}{1-a} \qquad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\det A}{\det A} = 1 \qquad z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{(1+a)}{(1+a)(1-a)} = \frac{1}{1-a}$$

– Para $a = -1$, el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Hallémoslas:

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que corresponde al sistema $\begin{cases} -x+y+z=2 \\ y=1 \end{cases}$

$-x+1+z=2$; $z = x+1$. Llamando x = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x=k \\ y=1 \\ z=k+1 \end{cases}$, con k ∈ R.

2.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obtener (con los cálculos intermedios necesarios, así como con la mención explícita de los teoremas o propiedades utilizados):

2.2.1 (1,25 puntos) Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$.

Resolución

$\det A = 1 + 2 + 2 = 5 \neq 0$. Luego, A tiene inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj\ A)^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & 3 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5U$

2.2.2 (1,25 puntos) Los valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.

Resolución

$$\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1} \Rightarrow \alpha\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Operando, $\begin{pmatrix} -\alpha + \beta + 1 & 4\alpha + 2\beta & 2\alpha \\ -\alpha - \beta & -\alpha + \beta + 1 & 2\alpha + \beta \\ 2\alpha + \beta & 2\alpha & \alpha + \beta + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Igualando elementos

$$\begin{cases} 5(-\alpha + \beta + 1) = 1 \\ 5(4\alpha + 2\beta) = -2 \\ 5(2\alpha) = 2 \to \alpha = \frac{1}{5} \\ 5(-\alpha - \beta) = 2 \\ 5(-\alpha + \beta + 1) = 1 \\ 5(2\alpha + \beta) = -1 \\ 5(\alpha + \beta + 1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\left(-\frac{1}{5} + \beta + 1\right) = 1 \to -1 + 5\beta + 5 = 1 \to \beta = \frac{-3}{5} \\ 5\left(4\frac{1}{5} + 2\beta\right) = -2 \to 4 + 10\beta = -2 \to \beta = \frac{-6}{10} = \frac{-3}{5} \\ 5\left(-\frac{1}{5} - \beta\right) = 2 \to -1 - 5\beta = 2 \to \beta = \frac{-3}{5} \\ 5\left(-\frac{1}{5} + \beta + 1\right) = 1 \to -1 + 5\beta + 5 = 1 \to \beta = \frac{-3}{5} \\ 5\left(2\frac{1}{5} + \beta\right) = -1 \to 2 + 5\beta = -1 \to \beta = \frac{-3}{5} \\ 5\left(\frac{1}{5} + \beta + 1\right) = 3 \to 1 + 5\beta + 5 = 3 \to \beta = \frac{-3}{5} \end{cases}$$

. Luego, $\alpha = \frac{1}{5},\ \beta = \frac{-3}{5}$

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)
Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2
3.1 Responda a todos los subapartados siguientes:
Dadas las rectas $r: \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases}$ y $s: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = z + 2$, obtener:
3.1.1 (1,25 puntos) La ecuación del plano paralelo a ambas y que pase por el origen.

Resolución

Un vector director de r es $\overrightarrow{d_r} = (0, 1, -1)\ x\ (2, 0, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -2, -2) \,//\, (0, 1, 1)$

Un vector director de s es $\overrightarrow{d_s} = (-1, 3, 1)$

Por ser el plano π que se pide paralelo a r y s, $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$ son vectores directores de π. Luego, un vector normal de π es $\vec{n} = \overrightarrow{d_r}\ x\ \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 1) \,//\, (2, 1, -1)$

Como π pasa por el origen, (0, 0, 0), π: 2(x – 0) + 1(y – 0) – 1(z – 0) = 0 ⇒ π: 2x + y – z = 0

3.1.2 (1,25 puntos) La distancia de un punto de r y de un punto de s al plano π.

Resolución

Haciendo en r z = 0, se obtiene x = –1, y = z = 0. Luego, A(–1, 0, 0) ∈ r ; también B(2, 0, –2) ∈ s

Usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano,

$$d(A, \pi) = \frac{|2(-1) + 0 - 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cong 0{,}82\ u$$

$$d(B, \pi) = \frac{|2.2 + 0 - (-2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6} \cong 2{,}45\ u$$

3.2 Responda a todos los subapartados siguientes:
Dadas la recta r y el plano π, de ecuaciones $r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$ y π: ax + y – z = b, con a y b parámetros reales, obtener:
3.2.1 (1 punto) Los valores del parámetro a para los que r y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a.

Resolución

Observa que r: (x, y, z) = (5 + k, 1 + 3k, 4k). Como r y π se tienen que cortar en un único punto, el sistema formado por sus ecuaciones debe tener solución única. Sustituyendo r en π:

a(5 + k) + 1 + 3k – 4k = b ⇒ ak – k = b – 5a – 1 ⇒ (a – 1)k = b – 5a – 1. Para que tenga solución única debe ser a ≠ 1 y queda $k = \frac{b - 5a - 1}{a - 1}$. Sustituyendo en r, el punto de corte es

$$P\left(5 + \frac{b - 5a - 1}{a - 1}, 1 + 3\,\frac{b - 5a - 1}{a - 1}, 4\,\frac{b - 5a - 1}{a - 1}\right) = P\left(\frac{b - 6}{a - 1}, \frac{3b - 14a - 4}{a - 1}, \frac{4b - 20a - 4}{a - 1}\right)$$

3.2.2 (1,5 puntos) Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π.

Resolución

Recuerda que $r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$ y π: ax + y – z = b,

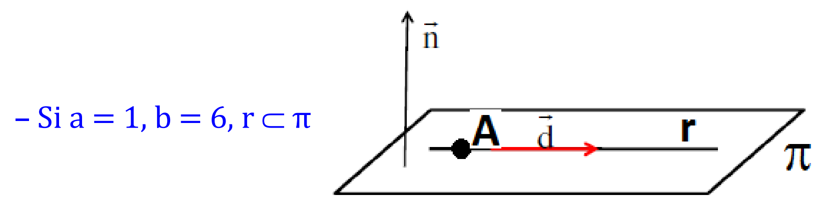
Un vector director de r es $\overrightarrow{d} = (1, 3, 4)$, A(5, 1, 0) ∈ r y un vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (a, 1, -1)$.

$\overrightarrow{d} . \overrightarrow{n} = a + 3 - 1 = a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

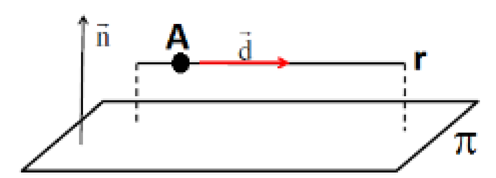
– Si a = 1, entonces $\overrightarrow{d} . \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow r \subset \pi$ ó r // π. En este caso, $\pi: x + y - z = b$, A(5, 1, 0) ∈ r

$A \in \pi \Leftrightarrow 5 + 1 - 0 = b$, o sea si b = 6. Por tanto,

– Si a = 1, b = 6, r ⊂ π



– Si a = 1, b ≠ 6, r no corta a π, o sea r // π



PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)
Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2
4.1 Responda a todos los subapartados siguientes:
Se dan las funciones polinómicas $f(x) = -x^2 + x + 2$ y $g(x) = x^2 - b$, siendo b un parámetro real.
Obtener:
4.1.1 (1,25 puntos) El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto P(–1, 0). Dibujad un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.
4.1.2 (1,25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

Resolución

$-x^2 + x + 2 = x^2 - b \Rightarrow -2x^2 + x + b + 2 = 0$. Como uno de los puntos de intersección debe ser P(–1, 0) el valor de x = –1 debe cumplir la ecuación. Luego, $-2(-1)^2 - 1 + b + 2 = 0$, $b - 1 = 0$

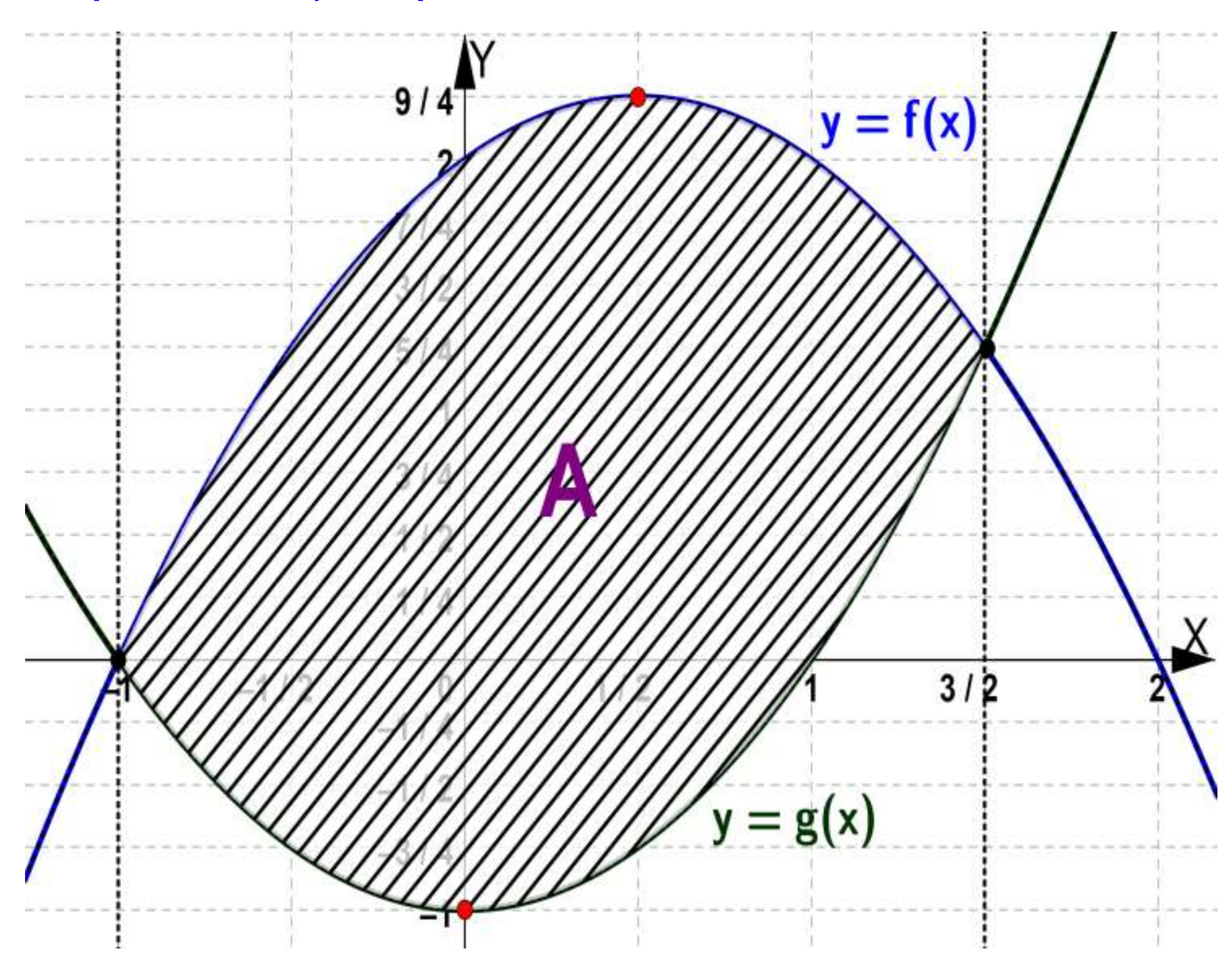
El valor buscado es b = 1. En este caso, $-x^2 + x + 2 = x^2 - 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$, $x = \frac{1 \pm 5}{4}$, $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$

Si $x = -1$, $y = (-1)^2 - 1 = 0$; si $x = \frac{3}{2}$, $y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4}$. Las curvas se cortan en (–1, 0) y $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$

Como $f'(x) = -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; $y = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}$, la curva $y = -x^2 + x + 2$ es una parábola cóncava de vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Como $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $y = g(0) = 0^2 - 1 = -1$, la curva $y = x^2 - 1$ es una parábola convexa de vértice (0, –1)

Un esquema de las curvas y de la superficie finita encerrada entre ellas es



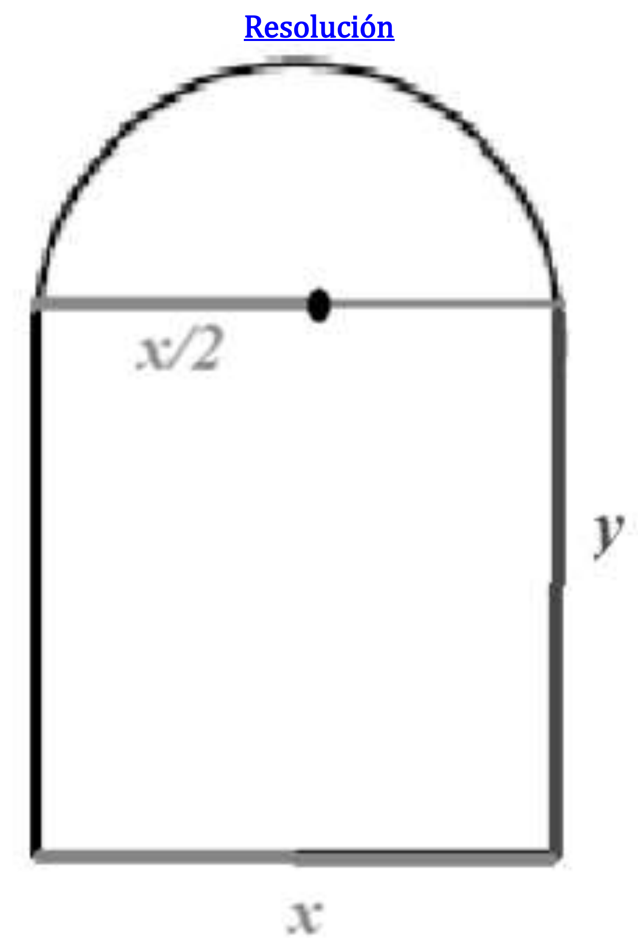
Se pide $A = \int_{-1}^{3/2} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-1}^{3/2} [-x^2 + x + 2 - (x^2 - 1)]\, dx = \int_{-1}^{3/2} (-2x^2 + x + 3)\, dx$.

Una primitiva del integrando es $p(x) = \frac{-2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x = \frac{-4x^3 + 3x^2 + 18x}{6}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p\left(\frac{3}{2}\right) - p(-1) = \frac{-4\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 18\,\frac{3}{2}}{6} - \frac{-4(-1)^3 + 3(-1)^2 + 18(-1)}{6} = \frac{\frac{81}{4}}{6} - \frac{-11}{6} = \frac{125}{24} \cong 5{,}21\ u^2$$

4.2 Responda a todos los subapartados siguientes:
Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo.
La base del rectángulo mide x y su altura mide y, por lo que el diámetro del semicírculo mide x.
Obtener:
4.2.1 (1 punto) La expresión S(x) que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura x.
4.2.2 (1,5 puntos) El valor de x para el que la función tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

Resolución



Como el perímetro de la ventana es 5 m, entonces $x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 5$; $2x + 4y + \pi x = 10$; $y = \frac{10-2x-\pi x}{4}$

Función a maximixar: $S(x) = Area = x.y + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x.\frac{10-2x-\pi x}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{20x-4x^2-2\pi x^2+\pi x^2}{8}$

$S(x) = Area = \frac{20x-4x^2-\pi x^2}{8}$; $S'(x) = \frac{20-8x-2\pi x}{8} = \frac{10-(4+\pi)x}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{4+\pi}$

$S''(x) = \frac{-4-\pi}{4}$; $S''\left(\frac{10}{4+\pi}\right) = \frac{-4-\pi}{4} < 0$. Para $x = \frac{10}{4+\pi} \cong 1{,}4\ m$ se alcanza el máximo.

El área máxima es $S\left(\frac{10}{4+\pi}\right) = \frac{20\frac{10}{4+\pi}-(4+\pi)\left(\frac{10}{4+\pi}\right)^2}{8} = \frac{\frac{200}{4+\pi}-\frac{100}{4+\pi}}{8} = \frac{\frac{100}{4+\pi}}{8} = \frac{25}{8+2\pi} \cong 1{,}75\ m^2$